

Latihan Logika Matematika: Soal 2 dan Soal 8

Ringkasan Simbol yang Dipakai

Simbol	Arti
S	Himpunan semesta, yaitu himpunan tempat semua nilai x diambil.
$x \in S$	x adalah anggota dari himpunan S .
\exists	“Ada” atau “terdapat minimal satu”.
\forall	“Untuk semua” atau “setiap”.
$P(x), Q(x)$	Pernyataan atau predikat yang bergantung pada nilai x .
$\neg P(x)$	Negasi dari $P(x)$, artinya “bukan $P(x)$ ”.
\wedge	“Dan”. Pernyataan $A \wedge B$ benar jika A benar dan B benar.
\vee	“Atau”. Pernyataan $A \vee B$ benar jika minimal salah satu dari A atau B benar.
\rightarrow	Implikasi, dibaca “jika ... maka ...”.
\mathbb{R}	Himpunan semua bilangan real.

Soal 2

Diketahui himpunan semesta

$$S = \{1, 2, 3, 4\}$$

dan predikat-predikat

$$P(x) : x + 2 \leq 4$$

serta

$$Q(x) : x \text{ genap.}$$

(a) Tentukan nilai kebenaran dari

$$(\exists x \in S)(P(x) \wedge \neg Q(x)).$$

(b) Tentukan negasi dari

$$(\exists x \in S)(P(x) \wedge \neg Q(x)),$$

dan nyatakan dalam kalimat verbal.

(c) Tentukan kesetaraan dari

$$(\exists x \in S)(P(x) \wedge \neg Q(x)),$$

dan nyatakan dalam kalimat verbal.

Pembahasan Awal

Pertama, kita pahami arti dari setiap predikat.

Karena

$$P(x) : x + 2 \leq 4,$$

maka

$$x \leq 2.$$

Jadi, $P(x)$ benar untuk $x = 1$ dan $x = 2$, tetapi salah untuk $x = 3$ dan $x = 4$.

Sementara itu,

$$Q(x) : x \text{ genap.}$$

Jadi, $Q(x)$ benar untuk $x = 2$ dan $x = 4$, tetapi salah untuk $x = 1$ dan $x = 3$.

Agar lebih jelas, kita buat tabel.

x	$P(x) : x + 2 \leq 4$	$Q(x) : x \text{ genap}$	$\neg Q(x)$
1	Benar	Salah	Benar
2	Benar	Benar	Salah
3	Salah	Salah	Benar
4	Salah	Benar	Salah

Solusi (a)

Kita diminta menentukan nilai kebenaran dari

$$(\exists x \in S)(P(x) \wedge \neg Q(x)).$$

Kalimat tersebut dibaca:

“Ada minimal satu x anggota S sehingga $P(x)$ benar dan $Q(x)$ salah.”

Karena $P(x)$ berarti $x + 2 \leq 4$, dan $\neg Q(x)$ berarti x tidak genap, maka kalimatnya menjadi:

“Ada minimal satu x anggota S sehingga $x + 2 \leq 4$ dan x tidak genap.”

Sekarang cek anggota $S = \{1, 2, 3, 4\}$.

Ambil $x = 1$.

$$1 + 2 \leq 4$$

benar, karena $3 \leq 4$.

Selain itu, 1 tidak genap, sehingga $\neg Q(1)$ benar.

Jadi, untuk $x = 1$, pernyataan

$$P(x) \wedge \neg Q(x)$$

benar.

Karena ada minimal satu nilai x yang memenuhi, maka

$$\boxed{(\exists x \in S)(P(x) \wedge \neg Q(x)) \text{ bernilai benar.}}$$

Solusi (b)

Pernyataan awal adalah

$$(\exists x \in S)(P(x) \wedge \neg Q(x)).$$

Negasi dari “ada minimal satu” adalah “untuk semua tidak”. Secara simbolik,

$$\neg(\exists x \in S)A(x) \equiv (\forall x \in S)\neg A(x).$$

Maka

$$\neg[(\exists x \in S)(P(x) \wedge \neg Q(x))]$$

setara dengan

$$(\forall x \in S)\neg(P(x) \wedge \neg Q(x)).$$

Gunakan hukum De Morgan:

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B.$$

Dengan $A = P(x)$ dan $B = \neg Q(x)$, diperoleh

$$\neg(P(x) \wedge \neg Q(x)) \equiv \neg P(x) \vee Q(x).$$

Jadi negasinya adalah

$$\boxed{(\forall x \in S)(\neg P(x) \vee Q(x)).}$$

Karena $P(x)$ adalah $x + 2 \leq 4$, maka $\neg P(x)$ adalah

$$x + 2 > 4.$$

Karena $Q(x)$ adalah “ x genap”, maka kalimat verbal negasinya adalah:

Untuk setiap x anggota S , berlaku bahwa $x + 2 > 4$ atau x genap.

Solusi (c)

Kesetaraan dari pernyataan

$$(\exists x \in S)(P(x) \wedge \neg Q(x))$$

bisa diperoleh dari hasil negasi pada bagian (b).

Dari bagian (b), kita tahu bahwa negasi pernyataan tersebut adalah

$$(\forall x \in S)(\neg P(x) \vee Q(x)).$$

Maka pernyataan awal setara dengan negasi dari hasil tersebut:

$$\boxed{(\exists x \in S)(P(x) \wedge \neg Q(x)) \equiv \neg(\forall x \in S)(\neg P(x) \vee Q(x))}.$$

Dalam kalimat verbal:

Tidak benar bahwa untuk setiap x anggota S , berlaku $x + 2 > 4$ atau x genap.

Bentuk verbal yang lebih langsung adalah:

Ada minimal satu x anggota S sehingga $x + 2 \leq 4$ dan x tidak genap.

Soal 8

Suatu nilai $x \in \mathbb{R}$ dengan \mathbb{R} adalah himpunan bilangan real, telah membuat proposisi berikut bernilai salah:

$$[(x + 3)(x - 2) = 0] \rightarrow [x < 0].$$

- (a) Tentukan nilai x yang dimaksud.
(b) Dengan menggunakan nilai x pada (a), tentukan nilai kebenaran proposisi

$$x^2 - 5 > 0.$$

Pembahasan Simbol dan Ide Utama

Bentuk umum dari implikasi adalah

$$P \rightarrow Q.$$

Ini dibaca:

“Jika P , maka Q .”

Dalam soal ini,

$$P : (x + 3)(x - 2) = 0$$

dan

$$Q : x < 0.$$

Jadi proposisinya berbentuk:

$$P \rightarrow Q.$$

Tabel kebenaran implikasi adalah sebagai berikut.

P	Q	$P \rightarrow Q$
Benar	Benar	Benar
Benar	Salah	Salah
Salah	Benar	Benar
Salah	Salah	Benar

Dari tabel tersebut, implikasi

$$P \rightarrow Q$$

hanya bernilai salah dalam satu kondisi, yaitu ketika

P benar dan Q salah.

Jadi, agar

$$[(x + 3)(x - 2) = 0] \rightarrow [x < 0]$$

bernilai salah, harus berlaku:

$$(x + 3)(x - 2) = 0 \text{ benar}$$

dan

$$x < 0 \text{ salah.}$$

Solusi (a)

Karena bagian kiri harus benar, maka

$$(x + 3)(x - 2) = 0.$$

Gunakan sifat hasil kali nol:

$$AB = 0 \text{ berarti } A = 0 \text{ atau } B = 0.$$

Maka

$$x + 3 = 0 \text{ atau } x - 2 = 0.$$

Diperoleh

$$x = -3 \text{ atau } x = 2.$$

Namun, bagian kanan

$$x < 0$$

harus salah.

Artinya, x tidak boleh lebih kecil dari nol. Dengan kata lain, x tidak boleh negatif.

Sekarang cek dua kandidat:

- Jika $x = -3$, maka $x < 0$ benar. Ini tidak sesuai, karena bagian kanan harus salah.
- Jika $x = 2$, maka $x < 0$ salah. Ini sesuai.

Jadi nilai yang dimaksud adalah

$$\boxed{x = 2.}$$

Solusi (b)

Gunakan nilai $x = 2$ dari bagian (a).

Kita diminta menentukan nilai kebenaran dari

$$x^2 - 5 > 0.$$

Substitusi $x = 2$:

$$2^2 - 5 > 0.$$

Hitung bagian kiri:

$$4 - 5 > 0.$$

Maka

$$-1 > 0.$$

Pernyataan $-1 > 0$ adalah salah.

Jadi,

$$\boxed{x^2 - 5 > 0 \text{ bernilai salah.}}$$

Kesimpulan Singkat

Untuk Soal 2:

$$\boxed{(\exists x \in S)(P(x) \wedge \neg Q(x)) \text{ bernilai benar.}}$$

Negasinya adalah

$$\boxed{(\forall x \in S)(\neg P(x) \vee Q(x)).}$$

Untuk Soal 8:

$$\boxed{x = 2}$$

dan

$$\boxed{x^2 - 5 > 0 \text{ bernilai salah.}}$$